Davey-Stewartson方程式の解の解析性について (解析接続の応用)

内田, 英建; 林, 仲夫

数理解析研究所講究録
1155巻 2000年 49-59

Davey-Stewartson方程式の解の解析性について[1]

東京理科大 理　内田英建 (Hidetake UCHIDA)
東京理科大 理　林 仲夫 (Nakao HAYASHI)

1 Introduction

次のようなDavey-Stewartson(D-S)方程式の初期値問題を考える。

$$\text{(D-S)} \qquad \begin{cases} i\partial_t u + c_0\partial_{x_1}^2 u + \partial_{x_2}^2 u = c_1|u|^2 u + c_2 u\partial_{x_1}\varphi, & (t,x)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2, \\ \partial_{x_1}^2\varphi + c_3\partial_{x_2}^2\varphi = \partial_{x_1}|u|^2, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x\in\mathbf{R}^2, \end{cases}$$

ここで、$u(t,x)$ は複素数値関数とし、$\varphi(t,x)$ は実数値関数とする。また、パラメータの c_0, c_3 は実数とし、c_1, c_2 は複素数とする。この方程式は、c_0, c_3 の正負によって場合分けをすることができる。(c_0, c_3) が $(+,+)$、$(+,-)$、$(-,+)$、$(-,-)$ となるとき、それぞれ elliptic-elliptic、elliptic-hyperbolic、hyperbolic-elliptic、hyperbolic-hyperbolic と呼ばれている ([8] を参照)。このうち、連立方程式の2番目の方程式が elliptic となっている場合は、$\Delta^{-1}\partial_{x_1}^2$ が Identity と考えるならば、(D-S) 方程式は

$$i\partial_t u + c_0\partial_{x_1}^2 u + \partial_{x_2}^2 u = c_1|u|^2 u$$

と表される。この形の方程式は [8] で研究されている。

(D-S) 方程式は弱い水波の動きを表すモデルとして Davey-Stewartson [5] によって導入された。しかし、彼らは表面張力や毛細管現象などについては考えに入れていなかったが、これらの現象を考慮に入れるとき、パラメータの c_3 は負になることが、Djordjevic-Redekopp [7] によって示された。また、物理的背景については [3] も参照されたい。さらに、逆散乱法による解の存在に関する結果は [1], [2], [9], [10] で説明されている。

我々は (D-S) 方程式の elliptic-hyperbolic の場合を考える。ここでパラメータの c_0, c_3 を $c_0 = 1,\ c_3 = -1$ とする。このように決めても一般性は失われない。このとき、変数変換

$$\partial_{x_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_X - \partial_Y), \quad \partial_{x_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_X + \partial_Y)$$

[1] [13] 参照。

を使うと、

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_X^2 u + u\partial_Y^2 u = c_1|u|^2u + \dfrac{c_2}{\sqrt{2}}u(\partial_X - \partial_Y)\varphi, \\ \partial_X\partial_Y\phi = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\partial_X - \partial_Y)|u|^2 \end{cases}$$

と変形することができる。さらに、φ について変数 X, Y の極限を

$$\lim_{X\to\infty}\varphi(t,X,Y) = \lim_{Y\to\infty}\varphi(t,X,Y) = 0$$

とすると、この方程式は非線形項に非局所的な項を持つ Schrödinger 方程式

$$\begin{aligned} &i\partial_t u + \partial_X^2 u + \partial_Y^2 u \\ &\qquad = c_1|u|^2u + \frac{c_2}{2}\left(u\int_Y^\infty \partial_X|u|^2(X,Y')dY' - u\int_X^\infty \partial_Y|u|^2(X',Y)dX'\right) \end{aligned}$$

として表される。そこで、我々は非局所的な項を持つ非線形 Schrödinger 方程式

$$\text{(NLS)}\qquad \begin{cases} i\partial_t u + \partial_{x_1}^2 u + \partial_{x_2}^2 u \\ = c_0|u|^2u + c_1u\displaystyle\int_{x_2}^\infty \partial_{x_1}|u|^2dx_2' + c_2u\int_{x_1}^\infty \partial_{x_2}|u|^2dx_1', \qquad (t,x)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2, \\ u(o,x) = u_0(x), \qquad x\in\mathbf{R}^2, \end{cases}$$

を考える。ここで、c_0, c_1, c_2 は複素係数とする。

このSchrödinger型方程式の非線形項の特徴は、非線形項に非局所的な項を含んでいるが、作用素 J_{x_1} を $J_{x_j} = J_{x_j}(t) = x_j + 2it\partial_{x_j} = \mathcal{M}_j 2it\partial_{x_j}\mathcal{M}_j^{-1}$, $j=1,2$ とする。ただし、関数 $\mathcal{M}_j$ は $\mathcal{M}_j(t) = \exp(ix_j^2/4t)$ と定義する。このとき、以下のような性質を満たす。

$$\text{(1)}\qquad J_{x_1}\left(u\int_{x_1}^\infty \partial_{x_2}|u|^2dx_1'\right) = (J_{x_1}u)\int_{x_1}^\infty \partial_{x_2}|\psi|^2dx_1' - u(\overline{u}J_{x_2}u - u\overline{J_{x_2}u}).$$

上の等式からもわかるように、作用素 J_{x_j} は非線形項に対して微分のように振る舞う。さらに、恒等式

$$\text{(2)}\qquad u\int_{x_1}^\infty \partial_{x_2}|u|^2dx_1' = u\frac{1}{2it}\int_{x_1}^\infty (\overline{u}J_{x_2}u - u\overline{J_{x_2}u})dx_1'$$

を満たすことより、大域的存在を示すために必要な時間の減衰を得ることができる。作用素 J_{x_1} は、Sobolev 空間では、重みを表すものとして用いられるが、(2) から、重みを犠牲にするとき時間減衰を得ることができることがわかる。以上より、(NLS) は時間大域解を持つ可能性の強いことを示している。ただし、(2) の条件を満たす非線形項を持つ方程式が時間大域解得られるかということは明らかではない。例えば、

$$i\partial_t u + \partial_{x_1}^2 u + \partial_{x_2}^2 u = \partial_x|u|^2$$

の大域解の存在は未解決である。

ここで関数空間と記号の定義をする。重み付きの Sobolev 空間を

$$\mathbf{H}^{m,s,p} = \{f \in \mathbf{L}^p; \|(1+x_1^2+x_2^2)^{s/2}(1-\partial_{x_1}^2-\partial_{x_2}^2)^{m/2}f\|_p < \infty,\ m,s \in \mathbf{R}^+\},$$

$$\mathbf{H}^{m,s,p}(\mathbf{R}_{x_j}) = \{f \in \mathbf{L}^p(\mathbf{R}_{x_j}); \|(1+{x_j}^2)^{s/2}(1-\partial_{x_j}^2)^{m/2}f\|_{\mathbf{L}^p(\mathbf{R}_{x_j})} < \infty,\ m,s \in \mathbf{R}^+\}$$

と定義する。簡単のために、ノルムについて $\|\cdot\|_2$ と $\|\cdot\|_{m,s,2}$ をそれぞれ $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_{m,s}$ と表す。また、1 次元の関数空間を考えるとき、それぞれ、$\mathbf{L}^p_{x_j} = \mathbf{L}^p(\mathbf{R}_{x_j})$, $\mathbf{L}^p_{x_1}\mathbf{L}^q_{x_2} = \mathbf{L}^p(\mathbf{R}_{x_1};\mathbf{L}^q(\mathbf{R}_{x_2}))$, $\mathbf{H}^{m,s}_{x_j} = \mathbf{H}^{m,s}(\mathbf{R}_{x_j})$ を用いることにする。また、$\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}$, $J^\beta = J_{x_1}^{\beta_1}J_{x_2}^{\beta_2}$ とする。ここで、α, β は多重指数とし、$|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2$, $|\beta| = \beta_1+\beta_2$ とする。さらに、$\partial_{x_j}^{-1} = \int_{-\infty}^{x_j} dx'_j$, $j = 1,2$ とする。

今回得られた結果を述べる前に、時間大域解の存在に関する結果を 1 つ挙げたい。

定理 1.1 (Hayashi, N. and Hirata, H. [11]). 初期データ u_0 が

$$u_0 \in \mathbf{H}^{3,0} \cap \mathbf{H}^{0,3},$$
$$\left(\sum_{|\alpha|+|\beta|\le k} \|\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}u_0\|^2\right)^{1/2} \le \delta_k, \quad \text{for } k \ge 3$$

を満たしているとし、δ_k は十分小さいものとする。このとき、方程式 (NLS) の解 $u(t,x)$ は唯一つ大域的に存在する。この解は、

$$u \in \mathbf{L}^\infty_{loc}(\mathbf{R}\ ;\ \mathbf{H}^{3,0} \cap \mathbf{H}^{0,3}) \cap C(\mathbf{R}\ ;\ \mathbf{H}^{2,0} \cap \mathbf{H}^{0,2}),$$
$$(1+t)\|u(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \le C\delta_3$$

を満たす。

我々は、この定理の証明で用いられた方法をもとに、今回、得られた結果を証明したい。この定理の証明では、必要なエネルギー不等式を得るために、作用素

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}\left(\int_{-\infty}^{x_j} \|u(t,x'_j)\|^2_{\mathbf{L}^2_{x_k}}\, dx'_j \frac{-i\partial_{x_j}}{\langle -i\partial_{x_j}\rangle}\right)^m, \quad \text{for } j = 1,2$$

が用いられた。ただし、$\langle -i\partial_{x_j}\rangle = (1-\partial_{x_j}^2)^{1/2}$ とする。我々は、この作用素ではなく、より簡単な別の作用素を使うことにする。詳しくは、第 2 節を参照のこと。

次に解析空間を定義する。複素平面上の帯領域 $S(r)$ を

$$S(r) = \{z \in \mathbf{C}^2\ ;\ -r < \mathrm{Im} z_j < r,\ j = 1,2\}$$

とする。複素数値関数 $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^2$ は $S(r)$ で解析接続するとき、同じ記号 $f(z)$ によって表すことにする。このとき、解析空間

$$A^{m,s}(|\theta|) = \{f(z)\ ;\ f(z) \text{ is analytic on } S(|\beta|),\ \|f\|_{A^{m,s}(|\theta|)} < \infty\}$$

と定義する。ここで、ノルム $\|f\|_{A^{m,s}(|\theta|)}$ を

$$\|f\|_{\mathbf{A}^{m,s}(|\theta|)} = \sup_{y\in(-|\theta|,|\theta|)^2} \|f(\cdot + iy)\|_{m,s}$$

$$\sup_{y\in(-|\theta|,|\theta|)^2} \|f(\cdot + iy)\|^2 = \sum_{j,k=1}^{2} \left(\int |f(x_1 + i(-1)^j\theta, x_2 + i(-1)^k\theta)|^2 dx_1 dx_2 \right)^{1/2}$$

とする。

Fourier 変換を

$$\mathcal{F}_j\phi(\xi_j) = \hat{\phi}(\xi_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\xi_j x_j}\phi(x_j)dx_j$$

とし、逆 Fourier 変換を

$$\mathcal{F}_j^{-1}\psi(x_j) = \check{\psi}(x_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i\xi_j x_j}\psi(\xi_j)d\xi_j$$

とする。さらに、Schrödinger 発展作用素を次のように定義する。

$$\mathcal{U}_j(t)\phi(x_j) = \frac{1}{(4\pi it)^{1/2}} \int e^{i(x_j-y)^2/4t}\phi(y)dy, for \text{for } j = 1, 2. \tag{3}$$

これは、Fourier 変換を用いて $\mathcal{U}_j(t) = \mathcal{F}_j^{-1}e^{it|\xi_j|^2}\mathcal{F}_j$ と表すこともできる。さらに、関数 $\mathcal{M}_j = \mathcal{M}_j(t) = \exp(i|x_j|^2/4t)$ を用いるとき、次の恒等式が成立する。

$$\begin{aligned} &\mathcal{U}_j(t) = \mathcal{M}_j(t)D_j(t)\mathcal{F}_j\mathcal{M}_j(t), \qquad D_j(t)^{-1} = iD_j(\tfrac{1}{4t}), \\ &\mathcal{U}_j(-t) = \mathcal{M}_j(t)^{-1}F_j^{-1}D(t)^{-1}\mathcal{M}_j(t)^{-1} = \mathcal{M}_j(-t)i\mathcal{F}_j^{-1}D_j(\tfrac{1}{4t})\mathcal{M}_j(-t). \end{aligned} \tag{4}$$

ここで、$D_j(t)$ は

$$(D_j(t)\phi)(x_j) = \frac{1}{(2it)^{1/2}}\phi(\frac{x_j}{2t}), \qquad j = 1, 2$$

で定義される dilation 作用素とする。

次に Hilbert 変換 $\mathcal{H}_j$ を

$$\mathcal{H}_j\phi(x_1, x_2) \equiv \mathcal{H}_{x_j}\phi(x_1, x_2) = -i\mathcal{F}_j^{-1}\frac{\xi_j}{|\xi_j|}\mathcal{F}_j\phi, \quad \text{for } j = 1, 2$$

とし、この Hilbert 変換を用いて分数幂の微分を

$$|\partial_{x_1}|^\gamma\phi = \mathcal{F}_1^{-1}|\xi_1|^\gamma\mathcal{F}_1\phi = C\int_{\mathbf{R}} (\phi(x_1 + z, x_2) - \phi(x_1, x_2))\frac{dz}{|z|^{1+\gamma}}$$

と定義する。また、同じように

$$|\partial_{x_1}|^\gamma \mathcal{H}_1\phi = -i\mathcal{F}_1^{-1}\mathrm{sign}\xi_1|\xi_1|^\gamma \mathcal{F}_1\phi = C\int_{\mathbf{R}} (\phi(x_1+z,x_2)-\phi(x_1,x_2))\frac{dz}{z|z|^\gamma},$$

も定義する（[14] を参照)。同様にして、$|\partial_{x_2}|^\alpha$ and $|\partial_{x_2}|^\gamma\mathcal{H}_2$ for $\gamma\in(0,1)$ も定義する。

ここで今回得られた結果を述べる。

定理 1.2. 初期データを重み付きの Sobolev 空間のノルム

$$\left\|\left(\prod_{j=1}^2\cosh\theta x_j\right)u_0\right\|_{3,0}+\left\|\left(\prod_{j=1}^2\cosh\theta x_j\right)u_0\right\|_{0,3}=\epsilon,\qquad \text{for } \theta\in\mathbf{R}$$

の意味で十分小さいとする。このとき、方程式 (NLS) の解 $u(t,x)$ が唯一つ大域的に存在する。この解は、$S(|2\theta t|)$ に解析的延長可能で

$$\exp(-iz^2/4t)u(t)\in\mathbf{A}^{0,2}(|2\theta t|),\qquad \text{for any } t$$

を満たす。

注 1.　定理 1.2 は、時間 t の増加と共に解 u の解析的な領域が広がっていくことを示している。これは、初期データが解析的でないとしても無限遠方で指数的に減衰していれば、(NLS) の解は複素平面上で解析的になることを意味する。

2 Linear Smoothing Effect

この節では、解の存在を示すために必要な不等式を与える。(NLS) のような非線形項を持つ方程式は、いわゆる derivative-loss が起きるので、通常の意味でのエネルギー法をそのまま用いることは出来ない。そこで、これを克服するために方程式の持つ平滑効果を用いる。線形 Schrödinger 方程式

$$\text{(LS)}\qquad \begin{cases} i\partial_t u+(\partial_{x_1}^2+\partial_{x_2}^2)u=f, & (t,x)\in\mathbf{t}\times\mathbf{R}^2,\\ u(0,x)=u_0(x), & x\in\mathbf{R}^2\end{cases}$$

の初期値問題に対する解の平滑効果を考える。$f=f(t,x)$ は与えられた関数とする。ここで、証明に重要な役割を果たす作用素 $\mathcal{S}(\varphi)$ を次のように定義する。

$$\mathcal{S}(\varphi)=\mathcal{X}(\varphi)\mathcal{Y}(\varphi),$$

$$\mathcal{X}(\varphi)=\cosh(\varphi_1)+i\sinh(\varphi_1)\mathcal{H}_1,\qquad \mathcal{Y}(\varphi)=\cosh(\varphi_2)+i\sinh(\varphi_2)\mathcal{H}_2.$$

実数値関数のベクトル $\varphi(t,x_1,x_2)=(\varphi_1(t,x_1),\varphi_2(t,x_2))$ の成分は、関数空間

$$\varphi_j(t,x_j)\in \mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{H}^{2,0,\infty}_{x_j})\cap \mathbf{C}^1([0,T];\mathbf{L}^\infty_{x_j})$$

の関数で、さらに正とする。この関数 φ は後で具体的に与えることにする。この作用素 $\mathcal{S}(\varphi)$ は

$$\|\mathcal{S}(\varphi)\psi\|\le 2\exp\left(\|\varphi\|_\infty\right)\|\psi\|$$

を満足している。ただし、$\|\varphi\|_\infty=\|\varphi_1\|_{\mathbf{L}^\infty_{x_1}}+\|\varphi_2\|_{\mathbf{L}^\infty_{x_2}}$ とする。これによって、$\mathcal{S}(\varphi)$ は $\mathbf{L}^2$-ノルムで有界かつ連続であることがわかる。また、この作用素は逆作用素が定義できて、$\mathcal{X}$ の逆作用素は $\mathcal{X}^{-1}=(1+i\tanh(\varphi_1)\mathcal{H}_1)^{-1}\frac{1}{\cosh(\varphi_1)}$ と書けることがわかる。さらに、評価

$$\|\mathcal{X}^{-1}(\varphi_1)\psi\|\le(1-\tanh(\|\varphi\|_\infty))^{-1}\|\psi\|\le\exp\left(\|\varphi\|_\infty\right)\|\psi\|.$$

を満たす。$\mathcal{Y}^{-1}$ についても同様に定義でき、$\mathcal{S}$ の逆作用素が定義できる。この作用素の特徴は、作用素の中の関数 $\cosh(\varphi_j)$ と $\sinh(\varphi_j)$ に 0 階の擬微分作用素が入っていないので、逆作用素が簡単に定義できることにある。また、交換子などの計算が、今までの作用素（[4], [6], [11] を参照）を用いる場合より簡単であるところが、特徴として挙げられる。

この作用素を用いるとき、我々は次の補題を得る。

補題 2.1 (Hayashi, N and Naumkin, P.I. [12]). 不等式

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\|\mathcal{S}u\|^2+\left\|\omega_1\mathcal{S}\sqrt{|\partial_{x_1}|}u\right\|^2+\left\|\omega_2\mathcal{S}\sqrt{|\partial_{x_2}|}u\right\|^2\\&\le 2\left|\mathrm{Im}(\mathcal{S}u,\mathcal{S}f)\right|+C\|u\|^2e^{2\|\varphi\|_\infty}\left(\|\omega\|_\infty^4+\|\omega\|_{1,0,\infty}\|\omega\|_\infty+\|\varphi_t\|_\infty\right)\end{aligned}$$

が初期値問題 (LS) の解 u に対して成り立つ。ただし、$\omega_j(x_j)=\sqrt{(\partial_j\varphi_j)}$, $j=1,2$ とし、$(\cdot,\cdot)$ は $\mathbf{L}^2$-内積を表す。

補題 2.1 で、$\mathcal{S}(\varphi)$ によって Schrödinger 型の方程式は $\frac{1}{2}$ 階微分得したエネルギー不等式を得ることができる。

さらに、非線形項を評価するために、次の補題が必要となる。

補題 2.2 (Hayashi, N and Naumkin, P.I. [12]). 次の不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}&\left|(\mathcal{S}u,\mathcal{S}\phi\partial_{x_2}^{-1}(\psi\partial_{x_1}w)\right|\\&\le 4\exp(4\|\varphi\|_\infty)\left(\left\|\|\phi\|_{\mathbf{L}^2_{x_2}}\mathcal{S}\sqrt{|\partial_{x_1}|}u\right\|^2+\left\|\|\psi\|_{\mathbf{L}^2_{x_2}}\mathcal{S}\sqrt{|\partial_{x_1}|}w\right\|^2\right)\\&\quad+C\left(\|u\|^2+\|w\|^2\right)\exp(6\|\varphi\|_\infty)\left(\|\phi\|^2_{\mathbf{L}^\infty_{x_1}\mathbf{L}^2_{x_2}}+\|\phi_{x_1}\|^2_{\mathbf{L}^\infty_{x_1}\mathbf{L}^2_{x_2}}\right.\\&\quad\left.+\|\psi\|^2_{\mathbf{L}^\infty_{x_1}\mathbf{L}^2_{x_2}}+\|\psi_x\|^2_{\mathbf{L}^\infty_{x_1}\mathbf{L}^2_{x_2}}\right)\left(1+\|\varphi\|^2_{1,0,\infty}\right).\end{aligned}$$

この補題の不等式の右辺の第 1 項に、部分積分をして出てきたような $\frac{1}{2}$ 階微分がある。この項と補題 2.1 の不等式の左辺の第 2 項をあわせて処理することによって、derivative-loss をなくすことができ、(NLS) のエネルギー評価を得ることができる。

我々は、指数的に減衰しているような初期データが、方程式によって解析的な領域に広がっていくことを示したい。そこで、上の 2 つの補題の解析的なものを考える必要がある。そこで、C_1, C_2 を適当な定数として、(4) を用いると

$$
\begin{aligned}
&C_1\|e^{i|\cdot|^2/4t}(1-\partial_{x_1}^2-\partial_{x_2}^2)^{m/2}u(t)\|^2_{\mathbf{A}^{0,s}(|2t\theta|)}\\
&\le \|\mathcal{U}(t)\cosh\theta(x_1+x_2)\mathcal{U}(-t)(1-\partial_{x_1}^2-\partial_{x_2}^2)^{m/2}u\|^2_{\mathbf{H}^{0,s}}\\
&\le C_2\|e^{i|\cdot|^2/4t}(1-\partial_{x_1}^2-\partial_{x_2}^2)^{m/2}u(t)\|^2_{\mathbf{A}^{0,s}(|2t\theta|)}
\end{aligned}
$$

という関係が成り立つ。つまり、問題をノルム

$$
\|\mathcal{U}(t)\cosh\theta(x_1+x_2)\mathcal{U}(-t)(1-\partial_{x_1}^2-\partial_{x_2}^2)^{m/2}u\|^2_{\mathbf{H}^{0,s}}
$$

で考えればよいことになる。

補題 2.1 の解析的版を挙げる。

補題 2.3. 不等式

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|\mathcal{S}h\|^2+\left\|\omega_1\mathcal{S}\sqrt{|\partial_{x_1}|}h\right\|^2+\left\|\omega_2\mathcal{S}\sqrt{|\partial_{x_2}|}h\right\|^2\\
&\le 2\left|\mathrm{Im}(\mathcal{S}h,\mathcal{S}\mathcal{U}(t)(1+x_1^2+x_2^2)^{s/2}e^{\theta x_1+\zeta x_2}\mathcal{U}(-t)(1-\partial_{x_1}^2-\partial_{x_2}^2)^{m/2}f)\right|\\
&\quad +C\|h\|^2e^{2\|\varphi\|_\infty}\left(\|\omega\|_\infty^4+\|\omega\|_{1,0,\infty}\|\omega\|_\infty+\|\varphi_t\|_\infty\right).
\end{aligned}
$$

が初期値問題 (LS) の解 u に対して成り立つ。ただし、

$$
h=\mathcal{U}(t)(1+x_1^2+x_2^2)^{s/2}e^{\theta x_1+\zeta x_2}\mathcal{U}(-t)(1-\partial_{x_1}^2-\partial_{x_2}^2)^{m/2}u
$$

とする。

この証明については、恒等式

$$
i\partial_t\mathcal{U}(-t)(1-\partial_{x_1}^2-\partial_{x_2}^2)^{m/2}u=\mathcal{U}(-t)(1-\partial_{x_1}^2-\partial_{x_2}^2)^{m/2}f
$$

と

$$
\mathcal{L}h=\mathcal{U}(t)(1+x_1^2+x_2^2)^{s/2}e^{\theta x_1+\zeta x_2}\mathcal{U}(-t)(1-\partial_{x_1}^2-\partial_{x_2}^2)^{m/2}f
$$

を使うことによって、補題 2.1 と同様に証明することができる。これらの関係式は、Schrödinger 線形作用素 $\mathcal{L}=i\partial_t+\partial_{x_1}^2+\partial_{x_2}^2$ が作用素 J と交換可能であることが使われている。

次に、補題 2.2 の解析的版をあげる。

補題 2.4. 次の不等式が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
&\left|(\mathcal{S}\mathcal{F}^{-1}e^{-(\theta\xi_1+\zeta\xi_2)}\mathcal{F}u, \mathcal{S}\mathcal{F}^{-1}e^{-(\theta\xi_1+\zeta\xi_2)}\mathcal{F}\phi\partial_{x_2}^{-1}(\psi\partial_{x_1}w))\right| \\
&\le 4e^{4\|\varphi\|_\infty}\left(\left\| \|\phi(\cdot+i\theta,\cdot+i\zeta)\|_{\mathbf{L}^2_{x_2}}\mathcal{S}\sqrt{|\partial_{x_1}|}u(\cdot+i\theta,\cdot+i\zeta)\right\|^2 \right. \\
&\quad \left. + \left\| \|\psi(\cdot+i\theta,\cdot+i\zeta)\|_{\mathbf{L}^2_{x_2}}\mathcal{S}\sqrt{|\partial_{x_1}|}w(\cdot+i\theta,\cdot+i\zeta)\right\|^2 \right) \\
&\quad + Ce^{6\|\varphi\|_\infty}\left(\|u(\cdot+i\theta,\cdot+i\zeta)\|^2 + \|w(\cdot+i\theta,\cdot+i\zeta)\|^2\right) \\
&\quad \times \left(\|\phi(\cdot+i\theta,\cdot+i\zeta)\|^2_{\mathbf{L}^\infty_{x_1}\mathbf{L}^2_{x_2}} + \|\phi_{x_1}(\cdot+i\theta,\cdot+i\zeta)\|^2_{\mathbf{L}^\infty_{x_1}\mathbf{L}^2_{x_2}}\right. \\
&\quad \left. + \|\psi(\cdot+i\theta,\cdot+i\zeta)\|^2_{\mathbf{L}^\infty_{x_1}\mathbf{L}^2_{x_2}} + \|\psi_{x_1}(\cdot+i\theta,\cdot+i\zeta)\|^2_{\mathbf{L}^\infty_{x_1}\mathbf{L}^2_{x_2}}\right)\left(1+\|\varphi\|^2_{1,0,\infty}\right).
\end{aligned}
$$

ここで、$\mathcal{F}=\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}^{-1}=\mathcal{F}_2^{-1}\mathcal{F}_1^{-1}$ とする。

証明は、Fourier 変換の性質

$$
\begin{aligned}
e^{-\theta\xi_j}(\mathcal{F}_j\phi(x_j))(\xi_j) &= \frac{e^{-\theta\xi_j}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi_j x_j}\phi(x_j)dx_j \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi_j(x_j-i\theta)}\phi(x_j)dx_j \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi_j x_j}\phi(x_j+i\theta)dx_j \\
&= (\mathcal{F}\phi(x_j+i\theta))(\xi_j).
\end{aligned}
$$

を利用することによって、補題 2.2 と同様に示すことができる。

3 Outline of Main Theorem

この節では、主定理の証明の概略について述べる。始めに、証明に必要な関数空間を導入する。

$$
X^k = \left\{ f \in C(\mathbf{R};\mathbf{L}^2)\ ;\ \sup_{t\in\mathbf{R}}\|u(t)\|_{X^k(t)} < \infty \right\}. \tag{5}
$$

関数空間 X^k は、ノルム

$$
\|u(t)\|_{X^k(t)} = \sum_{m+s\le k}\|e^{i|\cdot|^2/4t}(1-\partial_{x_1}^2-\partial_{x_2}^2)^{m/2}u\|_{\mathbf{A}^{0,s}(|\theta t|)} \tag{6}
$$

によって定義される空間とする。次に、(NLS) の線形化方程式を考える。

$$\begin{aligned}(7)\qquad & i\partial_t u + (\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2)u \\ &= c_1|\tilde{u}|^2\ \tilde{u} + c_2\ \tilde{u}\int_{x_2}^{\infty}(\overline{\tilde{u}}\partial_{x_1}u + \tilde{u}\partial_{x_1}\overline{u})(x_1, x_2{}')dx_2{}' \\ &\quad + c_3\tilde{u}\int_{x_1}^{\infty}(\overline{\tilde{u}}\partial_{x_2}u + \tilde{u}\partial_{x_2}\overline{u})(x_1{}', x_2)dx_1{}'.\end{aligned}$$

この方程式の解を写像 $\mathcal{P}$ によって

$$u = \mathcal{P}(\tilde{u})$$

で定義するとき、この写像が、閉球

$$\begin{aligned}\mathbf{B} =&\Big\{\tilde{u} \in C([0,\infty); \mathbf{H}^{3,0} \cap \mathbf{H}^{0,3})\ ; \\ &\sup_{t\in[0,\infty)}(1+|t|)^{-C\epsilon}\|\tilde{u}(t)\|_{X^3(t)} + \sup_{t\in[0,\infty)}\|\tilde{u}(t)\|_{X^2(t)} \le C\epsilon\ \Big\}\end{aligned}$$

を $\mathbf{B}$ 自身に移すことを示したい。そこで、第 2 節で示した補題を用いたいが、まだ、作用素の中にある関数 φ を決めていない。そこで、補題 2.3 の左辺の第 2 , 3 項と補題 2.4 の右辺の第 1 項をうまく処理するために、次のような φ を選ぶ。$j = 1,2$ に対して、

$$\varphi_j(t,x_j) = \frac{1}{\theta}\partial_{x_j}^{-1}(\varphi_{j,\theta,\theta}(t,x_j) + \varphi_{j,\theta,-\theta}(t,x_j) + \varphi_{j,-\theta,\theta}(t,x_j) + \varphi_{j,-\theta,-\theta}(t,x_j)),$$

$$\varphi_{j,\theta,\zeta}(t,x_j) = \left\|\mathcal{U}(t)e^{(\theta x_1+\zeta x_2)}\mathcal{U}(-t)\tilde{u}(t,x_1,x_2)\right\|_{\mathbf{L}^2_{x_j}}^2.$$

これによって、ω も定義され、次のような φ, ω に対するノルムの評価式を得ることができる。

$$(8)\qquad \begin{aligned}&\|\omega\|_\infty \le \frac{C}{\sqrt{\delta}}(1+t)^{-1/2}\|\tilde{u}(t)\|_{X^1(t)}, && \|\omega\|_{1,0,\infty} \le \frac{C}{\sqrt{\delta}}(1+t)^{-1/2}\|\tilde{u}(t)\|_{X^2(t)},\\ &\|\varphi\|_\infty \le \frac{C}{\delta}\|\tilde{u}(t)\|_{X^0(t)}. && \|\varphi_t\|_\infty \le \frac{C}{\delta}(1+t)^{-1}\|\tilde{u}(t)\|_{X^2(t)}.\end{aligned}$$

以上により、線形化方程式 (7) に補題 2.3 と補題 2.4 を適用すると、$\|\cdot\|_{X^3(t)}$ に関する不等式

$$\|u(t)\|_{X^3(t)}^2 \le C\epsilon^2 + C\epsilon^2\int_0^t(1+\tau)^{-1}\|u(\tau)\|_{X^3(\tau)}^2 d\tau$$

を得ることができる。さらに Gronwall の不等式より、

$$(9)\qquad \|u(t)\|_{X^3(t)} \le C\epsilon(1+t)^{C\epsilon}$$

を得る。また、

$$u\int_{x_j}^{\infty}\partial_{x_k}|u|^2 dx_j' = u\frac{1}{2it}\int_{x_j}^{\infty}(\bar{u}J_{x_k}u - u\overline{J_{x_k}u})dx_j' \quad \text{for } (j,k) = (1,2) \text{ or } (1,2)$$

を用いて線形化方程式に通常のエネルギー法を適用すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{X^2(t)} &\leq C\epsilon^2(1+t)^{-2}\|u(t)\|_{X^3(t)} \\ &\leq C\epsilon^3(1+t)^{-2+C\epsilon}\end{aligned}$$

を得ることができる。この両辺を t に関して積分すると、

$$\|u(t)\|_{X^2(t)} \leq C\epsilon(1+t)^{-1+C\epsilon} \tag{10}$$

となり、(9) で求めた評価より、欲している評価を得る。これによって、定理が示される。

参考文献

[1] Ablowitz, J.M. & Haberman, R.,1975, Nonlinear evolution equations in two and three dimensions, *Phys. Rev. Lett.,* **Vol. 35**, pp. 1185-1188.

[2] Ablowitz, J.M. & Segur,A., 1981, Solitons and the inverse scattering transform, *SIAM Studies in Applied Mathematics, 4.*

[3] Benney, D.J. & Roskes,G.L., 1969, Wave instabilities, *Stud. Appl. Math.,* **Vol. 48**, pp. 377-385.

[4] Chihara, H., 1995, The initial value problem for the elliptic-hyperbolic Davey- Stewartson equation, 1999 *J. Math. Kyoto Univ.*, **Vol.39**, pp. 41-66.

[5] Davey, A. & Stewartson, K., 1974, On three-dimensional packets of surface waves, *Proc. R. Soc. A.,* **Vol. 338**, pp. 101-110.

[6] Doi, S., 1994, On the Cauchy problem for Schrödinger type equations and regularity of solutions, *J. Math. Kyoto Univ.,* **Vol. 34**, pp. 319-328.

[7] Djordjevic, V.D. & Redekopp, L.G. 1977, On two-dimendional packets of capillary-gravity waves, *J. Fluid Mech.,* **Vol.79**, pp. 703-714.

[8] Ghidaglia, J.M. & Saut, J.C., 1990, On the initial value problem for the Davey-Stewartson systems, *Nonlinearity* , **Vol. 3**, pp. 475-506.

[9] Fokas, A.S. & Santini, P.M., 1988, Recursion operators and bi-Hamiltonian structures in multidimensions I , *Comm. Math. Phys.,* **Vol.115**, pp. 375-419.

[10] Fokas, A.S. and Santini,P.M., 1988, Recursion operators and bi-Hamiltonian structures in multidimensions II , *Comm. Math. Phys.,* **Vol.115**, pp. 449-474.

[11] Hayashi, N. & Hirata, H., 1996, Global existence and asymptotic behavior in time of small solutions to the elliptic-hyperbolic Davey-Stewartson system, *Nonlinearity,* **Vol. 9**, pp. 1387-1409.

[12] Hayashi, N. & Naumkin, P.I., On the Davey-Stewartson and Ishimori systems, 1999 *Math. Phy., Anal. and Geometry,* **Vol.2**, pp. 53-81

[13] Hayashi, N., Naumkin, P.I. & Uchida, H., in preparation.

[14] Stein, E.M., 1970, Singular Integral and Differentiability Properties of Functions, *Princeton Univ. Press, Princeton Math. Series 30.*